# Семинар 8. Линейные рекуррентные соотношения

## Примеры на ЛОРС

1) 

Характеристическое уравнение:



Раскладываем на множители:



Общее решение соотношения:

.

2) .

Характеристическое уравнение:



Многочлен  имеет три корня, один вещественный и два комплексных:

 .

Характеристический многочлен соотношения имеет эти же корни, но каждый корень имеет кратность 2.

В итоге общее решение соотношения будет иметь вид:



## Разбор задачи ДЗ

Для соотношения



найти:

1) частное решение соответствующего однородного соотношения при начальных условиях

;

2) общее решение данного неоднородного соотношения.

**Замечание**. Исходное соотношение могло быть задано и в такой форме:



при начальных условиях .

При этом, однако, частное решение получилось бы иным в силу того, что члены последовательности нумеруются с нуля, а не с единицы.

Решение

Характеристическое уравнение

,

то есть

,

откуда .

Общее решение однородного соотношения:



Удовлетворяем начальным условиям:



Умножая 1-е уравнение на 2 и складывая со 2-м, получим , откуда 

Итак, частное решение однородного соотношения при заданных начальных условиях имеет вид:



Методом подбора ищем частное решение неоднородного соотношения. Правая часть есть полином 2 степени, умноженный на тривиальную экспоненту с основанием 1. Это важный момент, так как, если бы среди корней характеристического уравнения была единица, то вид частного решения был бы другим по сравнению с тем, как его следует представить в данном случае, а именно:



Умножать эту функцию ни на какую степень n не нужно, так как единица (основание экспоненты) не является корнем характеристического уравнения.

Неизвестные коэффициенты квадратного трехчлена определяем, подставляя написанное выше выражение в исходное соотношение:



Раскрываем скобки:



Приравниваем коэффициенты многочленов при одинаковых степенях n:



Итак, общее решение неоднородного соотношения имеет вид:



По поводу рассмотренного решения полезно заметить следующее.

Если бы исходное соотношение имело вид

,

то число 1 было бы двукратным корнем характеристического уравнения, и частное решение неоднородного соотношения пришлось бы искать в виде .

## Дальнейшие примеры

1) Рассмотрим теперь такой пример: найти общее решение соотношения

.

Здесь есть одна тонкость: в правой части, к которой применим метод подбора, показатель степени в экспоненте должен быть равен n. Поэтому, правую часть следует преобразовать так:



Понятно, что число 4 является двукратным корнем характеристического уравнения

,

и частное решение неоднородного соотношения ищем в виде:

.

При подстановке в соотношение получим:



Сокращая на , получим:



Предлагается закончить решение самостоятельно.

2) Определить вид общего решения неоднородного соотношения:

 .

Характеристическое уравнение:

.

Вид правой части таков, что может потребоваться проверка корней 4-й степени из -2, поэтому можно поискать разложение характеристического многочлена на множители таким образом:



Таким образом,



Корни 4-й степени из -2 находятся в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса  с центром в нулевой точке, диагонали которого идут вдоль биссектрис координатных углов. Это две пары комплексно-сопряженных чисел:

 и



Следует заметить, что от значения аргумента, большего , следует отнять , чтобы попасть в диапазон главных значений аргумента . Например, при  в написанной выше формуле корней получим:



Общее решение однородного соотношения:

 .

Чтобы найти частное решение неоднородного соотношения, разобьем правую часть на три слагаемых и воспользуемся принципом суперпозиции.

Именно, правая часть ,

где



Первая функция есть многочлен 3-й степени, умноженный на тривиальную экспоненту с основанием «единица». Так как число 1 является двукратным корнем характеристического уравнения, то соответствующее слагаемое в частном решении будет иметь вид:



Для функции , учитывая, что комплексное число (точнее, комплексно-сопряженная пара)  не является корнем характеристического уравнения, получим такое слагаемое в частном решении:



Наибольшая степень многочлена при тригонометрических функциях равна 2(!).

И, наконец, для последнего слагаемого правой части ищем частное решение в виде:



Умножение всего квазиполинома на n возникает из-за того, что комплексно-сопряженная пара - простые корни характеристического уравнения.

В итоге получаем вид общего решения исходного соотношения:

.

В частном решении, заметим, содержится 18 неопределенных констант(!).